Développement : opérateurs de Hilbert-Schmidt

Dans la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et on suppose que $\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition 1

On dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$ converge.
On note $\mathscr{HS}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$.

1 – Le développement

Théorème 2

$$T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow T^* \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$$

De plus, la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$ ne dépend pas du choix de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration :

- Supposons que $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2$ converge. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une autre base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'égalité de Parseval, $\|Te_n\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle Te_n \mid f_k\rangle|^2$, donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle Te_n \mid f_k\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n \mid T^*f_k\rangle|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*f_k\|^2$$
d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Donc $T^* \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$.
- L'arbitrarité du choix de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ montre l'indépendance du choix de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et permet de montrer la réciproque en remarquant que $T^{**} = T$. ■

Propriété 3

$$(\mathscr{HS}(\mathcal{H}), \langle \cdot \mid \cdot\rangle_2) \text{ est un espace de Hilbert,}$$

où pour tout $(S,T) \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$, $\langle T \mid S\rangle_2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle Te_n \mid Se_n\rangle$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Démonstration : Déjà, $\mathscr{HS}(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: grâce au théorème précédent, on peut prendre une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque, et si T et S sont deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|(T+S)e_n\|^2 \leqslant 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \|Se_n\|^2\right) < +\infty.$$

Ensuite, pour tous $(S,T) \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$ et $N \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{H}$ puis dans $\mathbb{R}^{N+1}$,

$$\sum_{n=0}^{N} |\langle Te_n \mid Se_n\rangle| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \|Te_n\|\,\|Se_n\| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{N} \|Se_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|T\|_2\,\|S\|_2\,(< +\infty)$$

et donc $\langle S \mid T\rangle_2$ est bien défini. On vérifie immédiatement que c'est un produit scalaire.
Étudions maintenant la complétude : soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Soit $x \in \mathcal{H}$ de norme 1 : on peut compléter (x) en une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$, de sorte que pour un opérateur $S \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$, on a $\|Sx\|^2 \leqslant \|S\|_2^2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\left\|S\frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant \|S\|_2$, donc $\|Sx\| \leqslant \|S\|_2\,\|x\|$, donc $\|S\| \leqslant \|S\|_2$. Pour $S = T_n - T_m \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$ avec $(n,m) \in \mathbb{N}^2$

quelconque, on a donc $\|T_n - T_m\| \leqslant \|T_n - T_m\|_2$, et donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ce-dernier étant complet, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y converge. Notons T sa limite : $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} T$. Montrons que $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$ et $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_2} T$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M \in \mathbb{N}$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m \geqslant K$ et $n \geqslant K$, $\|T_n - T_m\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}/M$. De là,

$$\sum_{k=0}^{M} \|T_n e_k - T_m e_k\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{M} \|T_n - T_m\|^2 \underbrace{\cancel{\|e_k\|^2}}_{=1} \leqslant \varepsilon.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient : $\sum_{k=0}^{M} \|Te_k - T_m e_k\|^2 \leqslant \varepsilon$. Ainsi, quand $M \to +\infty$, on obtient que $T - T_m \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$, donc $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$, et $\|T - T_m\|_2 \leqslant \varepsilon$, *a fortiori* $T_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\|\cdot\|_2} T$. ■

2 – À ajouter s'il reste du temps

Lemme 4

L'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathscr{HS}(\mathcal{H})$.

Démonstration : Soit $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$. On sait que $T^* \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^* e_n\|^2 < +\infty \quad \text{donc} \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \sum_{n\geqslant N+1} \|T^* e_n\|^2 \leqslant \varepsilon$$

On définit $T_N : f \mapsto \sum_{n=1}^{N} \langle Tf \mid e_n \rangle e_n$: c'est un opérateur de rang fini, car à valeurs dans $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_N)$. Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{H}$:

$$(T - T_N)f = \sum_{n\geqslant N+1} \langle Tf \mid e_n \rangle e_n \quad \text{donc} \quad \|(T - T_N)f\|^2 = \sum_{n\geqslant N+1} |\langle Tf \mid e_n \rangle|^2$$

donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|(T - T_N)e_k\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n\geqslant N+1} |\langle Te_k \mid e_n \rangle|^2 = \sum_{n\geqslant N+1} \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle Te_k \mid e_n \rangle|^2 = \sum_{n\geqslant N+1} \|T^* e_n\|^2 \leqslant \varepsilon$$

Donc $\|T - T_N\| \leqslant \|T - T_N\|_2 \to 0$: ainsi, tout $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$ est limite (uniforme) d'une suite d'opérateurs de rang fini. On a bien montré que l'ensemble des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathscr{HS}(\mathcal{H})$, pour $\|\cdot\|$ et pour $\|\cdot\|_2$. ■

3 – Autre possibilité d'ajout (moins pertinente)

Théorème 5

$$T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \exists\, K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu) : T = \left[T_K : f \mapsto \int_\Omega K(x, \cdot) f \,\mathrm{d}\mu\right]$$

Démonstration :
$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que tout opérateur à noyau de carré intégrable est de Hilbert-Schmidt. Commençons par montrer que ce sont des opérateurs continus. Pour tout $f \in \mathcal{H}$ et μ-presque tout $x \in \Omega$,

$$|Tf(x)| = \left|\int_\Omega K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\mu(y)\right| \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|f\|_{L^2} \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\int_\Omega |Tf(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|f\|_{L^2}^2 \int_\Omega \int_\Omega |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\mu(y) \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|f\|_{L^2}^2 \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2$$

donc $Tf \in \mathcal{H}$ et $\|T\| \leqslant \|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} < +\infty$ (car $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$ par hypothèse), donc $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Montrons maintenant qu'un tel opérateur est de Hilbert-Schmidt : soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on définit $e_n \otimes \overline{e_m} : (x,y) \mapsto e_n(x)\overline{e_m(y)}$. On admet que $(e_n \otimes \overline{e_m})_{n,m}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega\times\Omega, \mu\otimes\mu)$. On peut alors écrire $K = \sum\limits_{n,m} \alpha_{n,m}\, e_n \otimes \overline{e_m}$ avec $\alpha_{n,m} = \langle K \mid e_n \otimes \overline{e_m}\rangle$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Te_n(x) = \int_\Omega K(x,y)e_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \overset{(*)}{=} \left\langle \sum_{k,m} \alpha_{k,m} e_k(x) e_n \;\middle|\; e_m \right\rangle = \sum_{k,m} \alpha_{k,m} e_k(x) \underbrace{\langle e_n \mid e_m\rangle}_{=\delta_{n,m}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{k,n} e_k(x)$$

($(*)$: on permute somme et intégrale car $\sum\limits_{n,m} |\alpha_{n,m}|^2 < +\infty$). Comme $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{k,n}|^2 = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} < +\infty \qquad (\dagger)$$

Donc $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, on considère l'application $\psi : \begin{array}{ccc} L^2(\Omega\times\Omega) & \to & \mathscr{HS}(\mathcal{H}) \\ K & \mapsto & T_K \end{array}$. Remarquons que ψ est bien définie, d'une part d'après ce qui précède, et d'autre part car $T_K = T_{K'} \Leftrightarrow K = K'$ $\mu\otimes\mu$-presque partout. D'après $(\dagger)$, ψ est une isométrie linéaire. Par conséquent, $\mathrm{Im}(\psi)$ est fermée (voir annexe). D'après le lemme, il nous suffit de montrer que tous les opérateurs de rang fini sont à noyau : de là, $\mathrm{Im}(\psi)$ sera dense dans $\mathscr{HS}(\mathcal{H})$ (puisqu'elle contient une partie dense), donc $\mathrm{Im}(\psi) = \overline{\mathrm{Im}(\psi)} = \mathscr{HS}(\mathcal{H})$, CQFD.
Montrons donc que les opérateurs de rang fini sont à noyau : soit S de rang fini. Il existe $f_1, \dots, f_n$ dans $\mathcal{H}$ telles que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$. Alors pour tout $u \in \mathcal{H}$ et μ-presque tout $x \in \Omega$,

$$Su(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle u \mid f_i\rangle f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u(y)\overline{f_i(y)} f_i(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

avec $K : (x,y) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{f_i(y)} f_i(x) \in L^2(\Omega\times\Omega, \mu\otimes\mu)$. ■

4 – Annexe

Proposition 6

Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifie $\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in E, \|Tx\|_F \geqslant \delta \|x\|_E$, alors $\mathrm{Im}(T)$ est fermée.

Démonstration : Si $Tx_n \to y$, alors $\delta \|x_n - x_m\|_E \leqslant \|Tx_n - Tx_m\|_F$, mais $(Tx_n)_n$ est de Cauchy, donc $(x_n)_n$ aussi, donc par complétude, $(x_n)_n$ converge vers un x, donc par unicité de la limite et par continuité de T, $y = Tx$. ■

Proposition 7

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Démonstration : Soit $T \in \mathscr{HS}(\mathcal{H})$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. On note P_N la projection sur $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_N)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme T est de Hilbert-Schmidt, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2$ converge, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon$.
Pour $x \in \mathcal{H}$, tel que $\|x\| \leqslant 1$, on a :

$$\|(T - TP_N)x\| = \left\| Tx - T\left(\sum_{k=0}^{N} \langle x \mid e_k\rangle e_k\right)\right\| = \left\| T\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \langle x \mid e_k\rangle e_k - \sum_{k=0}^{N} \langle x \mid e_k\rangle e_k\right)\right\| = \left\| T\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \langle x \mid e_k\rangle e_k\right)\right\|$$

$$= \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \langle x \mid e_k\rangle T(e_k)\right\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} |\langle x \mid e_k\rangle|\, \|T(e_k)\| \overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} |\langle x \mid e_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\|\,\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

On a ainsi montré que $\|T - TP_N\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, *i.e.* T est la limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini, donc T est compact. ■

5 – Commentaires

- Recasages : 213 pleinement, 205 dans une moindre mesure mais tout à fait acceptable, 208 un peu moins acceptable mais on peut forcer
- Source : ? ? ?
- Développement un peu long, mais très riche : on ne peut faire mieux en matière d'exploitation des outils hilbertiens (décomposition sur une base hilbertienne, égalité de PARSEVAL, utilisation de l'opérateur adjoint, ...)
- Tout ce qui précède le dernier théorème relève de manipulations usuelles dans les espaces de Hilbert, et doit donc être parfaitement maîtrisé. Dans le théorème, on cache sous le tapis quelques subtilités un peu dangereuses : la base hilbertienne de $L^2(\Omega\times\Omega, \mu\oplus\mu)$, et l'équivalence $T_K = T_{K'} \Leftrightarrow K = K'$ $\mu\oplus\mu$-presque partout. Pour la première, on peut voir M.S. Birman et M.Z. Solomjak, *Spectral theory of self-adjoint operator in Hilbert spaces*, et pour la deuxième, il faut être bien à l'aise avec la théorie de l'intégration... ou supprimer le passage en rouge pour s'éviter des ennuis (ce qui est sûrement le plus sage à faire, au vu de la longueur du reste de la présentation).